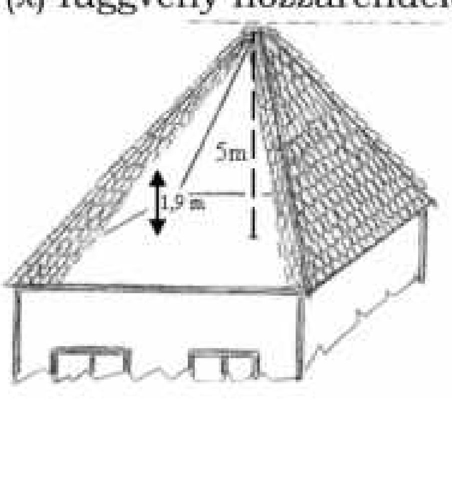
Térgeometria

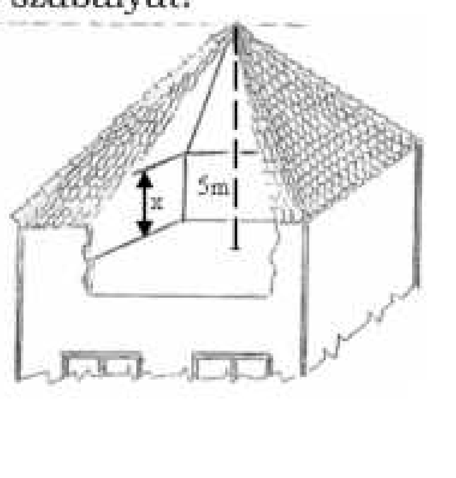
1) Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 18 egység, testátlója $36 \cdot \sqrt{2}$ egység.
   a) Mekkora szöget zár be a testátló az alaplap síkjával? (4 pont)
   b) Hány területegység a hasáb felszíne? (A felszín mérőszámát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (3 pont)
   c) Az alapél és a testátló hosszát – ebben a sorrendben - tekintsük egy mértani sorozat első és negyedik tagjának! Igazolja, hogy az alaplap átlójának hossza ennek a sorozatnak a második tagja! (4 pont)

2) Egy szobor márvány talapzatát egy 12 dm élű kocka alakú kőből faragják. Minden csúcsnál a csúcshoz legközelebbi élnegyedelő pontokat tartalmazó sík mentén lecsiszolják a kockát.
   a) A kész talapzatnak
      - hány éle,
      - hány csúcsa,
      - hány lapja van? (3 pont)
   b) A kész talapzatnak mekkora a felszíne? (6 pont)

   Az ékszerész vállalta, hogy elkészít 20 db egyforma tömegű ajándéktárgyat: a szobortalapzat kicsinyített mását. Az egyes ajándéktárgyak az alábbi féldrágakövek valamelyikéből készültek: achát, hematit, zöld jade és gránát. A kész ajándéktárgyakat a megrendelő átvételkor egyben lemérte. A 20 tárgy együttes tömege megfelelt a megrendelésnek. Otthon egyenként is megmérte a tárgyakat, és kiderült, hogy a féldrágakövekből készített négyféle ajándéktárgy közül egyik sem a megrendelt tömegű. Az ugyanabból az anyagból készülteket egymással azonos tömegűnek mérte. A három achát tárgy mindegyike 1%-kal kisebb; a hat darab hematit tárgy mindegyike 0,5%-kal kisebb; a hét zöld jade tárgy mindegyik 1,5%-kal nagyobb a megrendelésben szerepelt értéknél.
   c) A gránát tárgyak tömege hány százalékkal tért el a megrendeléstől?(7 pont)

3) Az 1. ábra szerinti padlástér egy 6x6 méteres négyzetes alapú gúla, ahol a tető csúcsa a négyzet középpontja felett 5 méter magasan van
   a) Milyen szöget zárnak be a tetősíkok a vízszintessel (padlássíkkal)? (4 pont)
   Hasznos alapterületnek számít a tetőtérben a terület, amely fölött a (bel)magasság legalább 1,9 méter.
   b) Mennyi lenne a tetőtér beépítésekor a hasznos terület? (6 pont)
   A tető cseréjekor a hasznos alapterület növelésének érdekében a ház oldalfalait egy ún. koszorúval kívánják magasítani. A ház teljes magassága- építészeti előírások miatt- nem növelhető, ezért a falak magasítása csak úgy lehetséges, ha a tető síkjának meredekségét csökkentik (2. ábra).
   Jelölje x a koszorú magasságát és T a hasznos alapterületet.
   c) Írja fel a $T(x)$ függvény hozzárendelési szabályát! (6 pont)





4) A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

a) Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (Ezt nevezzük a közelítő eljárás relatív hibájának.) (3 pont)

b) Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatát – a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott - közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke! (7 pont)

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának az arányát, és legyen $x>1$. Bizonyítandó, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibájának százalékban mérve a következő függvény adja meg:

$$f:\left]1;+\infty\right[\to\mathbb{R},\ f(x)=25\cdot\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}.$$

c) Igazolja, hogy f-nek nincs szélsőértéke! (6 pont)

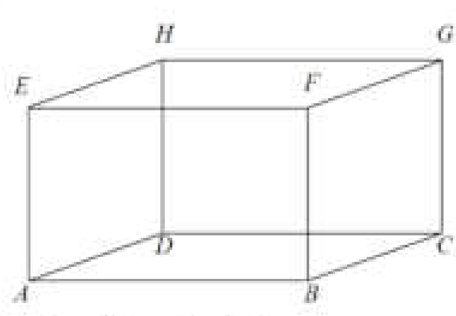
5) Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen F a CE oldalélnek, G pedig a DE oldalélnek a felezőpontja. Az $ABFG$ négyszög területe 504 területegység. Milyen hosszú a gúla oldaléle? (16 pont)

6) Jancsi vázát készít. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott m magasságú ($m>10$) gömbszelet határoló köréhez egy szintén m magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszelet határoló kör sugarával.

Mekkorának válassza Jancsi a gömbszelet m magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő méretű üreges fatalpra fogják állítani.)

Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága m, a határoló kör sugara pedig r, akkor a térfogata: $V=\frac{\pi}{6}m\cdot\left(3r^2+m^2\right)$ (16 pont)

7) Az $ABCDEFGH$ téglatest A csúcsból induló élei: $AB=12$, $AD=6$, $AE=8$. Jelölje HG felezőpontját P.

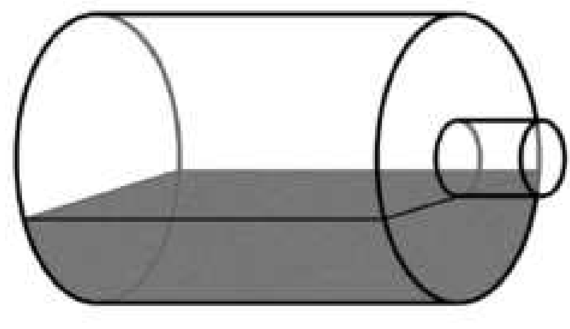


a) Számítsa ki az $ABCDP$ gúla felszínét! (10 pont)

b) Mekkora szöget zár be az $ABCDP$ gúla ABP lapjának síkja az $ABCD$ lap síkjával? (3 pont)

8) Egy fából készült négyzetes oszlop minden élének hossza centiméterben mérve 2-nél nagyobb egész szám. A négyzetes oszlop minden lapját befestjük pirosra, majd a lapokkal párhuzamosan 1 cm élű kis kockára vágtuk. A kis kockák közül 28 lett olyan, amelynek pontosan két lapja piros.
Mekkora lehetett a négyzetes oszlop térfogata? (16 pont)

9) Egy pillepalack alakja olyan forgáshenger, amelynek alapköre 8 cm átmérőjű. A palack fedőkörén található a folyadék kiöntésére szolgáló szintén forgáshenger alakú nyílás. A két hengernek közös a tengelye. A kiöntő nyílás alapkörének átmérője 2 cm. A palack magassága a kiöntő nyílás nélkül 30 cm. A palack vízszintesen fekszik úgy, hogy annyi folyadék van benne, amennyi még éppen nem folyik ki a nyitott kiöntő nyíláson keresztül.



a) Hány deciliter folyadék van a palackban? (Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (9 pont)

A palack tartalmát kiöntve, a palackot összenyomva, annak eredeti térfogata $2p$ százalékkal csökken. Egy hulladékot újrahasznosító cég (speciális gép segítségével) az ilyen módon tömörített palack térfogatát annak további p százalékával tudja csökkenteni. Az összenyomással, majd az azt követő gépi tömörítéssel azt érik el, hogy a palackot eredeti térfogatának 19,5 százalékára nyomják össze.

b) Határozza meg p értékét! (7 pont)

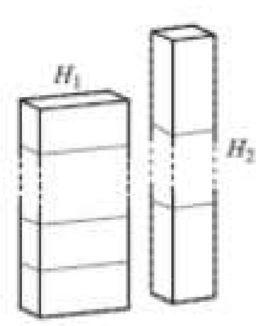
10) Egy forgáskúp nyílásszöge $90°$, magassága 6 cm.

a) Számítsa ki a kúp térfogatát (cm^3-ben) és a felszínét (cm^2-ben)! (4 pont)

b) A kúp alaplapjával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata (cm^3-ben), ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbének középpontján? (9 pont)

Válaszát egészre kerekítve adja meg!

11) Két egyenes hasábot építünk, H_1-et és H_2-t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágóak, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alaplapjukkal- az ábra szerint.



a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$. Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel? (8 pont)

b) Igazolja, hogy $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$ sorozat szigorú monoton csökkenő és korlátos! (8 pont)

12) a) Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto \frac{1}{2}|x-4|+3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt! (4 pont)

b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét! (2 pont)

c) Forgassuk meg a $[0;4]$ intervallumra leszűkített függvény grafikonját az x tengely körül! Számítsa ki az így keletkezett forgástest felszínét! (8 pont)

13) Egy centiméterben mérve egész szám élhosszúságú kockát feldarabolunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 egybevágó, 1 cm élű kocka.
Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát! (16 pont)

14) Kartonpapírból kivágunk egy 1,5 dm magasságú ABC szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húzunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyikből ugyanakkora 0,5 deciméternél kisebb x távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.

a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét x függvényében! (6 pont)

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú x magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágjuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait. Mekkora x estén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális? (10 pont)

15) Egy üzemben 4000 cm^3-es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)

a) Számítsa ki, mekkora felületre kellene tűzálló zománcfesték egy olyan edény esetén, amelynek oldallapjai 6,4 cm magasak! (3 pont)

b) Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománcfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát! (9 pont)

c) Minőségellenőrzési statisztikák alapján ismert: 0,02 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott edény selejtes. Egy áruházláncnak szállított 50 darabos tételben mekkora valószínűséggel lesz pontosan 2 darab selejtes? (4 pont)

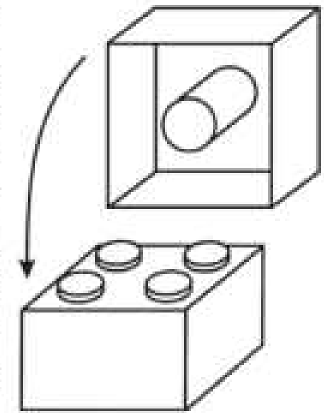
16) Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdeni, amelynek térfogata 1000 cm^3. A doboz aljának és tetejének anyagköltsége 0,2 cm^2 Ft, míg oldalának anyagköltsége 0,1 cm^2 Ft.

a) Mekkorák legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve! (13 pont)

A megtöltött konzervdobozokat tizenkettesével csomagolták kartondobozokba. Egy ellenőrzés alkalmával 10 ilyen kartondoboz tartalmát megvizsgálták. Minden kartondoboz esetén feljegyezték, hogy a benne található 12 konzerv között hány olyat találtak, amelyben a töltősúly nem érte el az előírt minimális értéket. Az ellenőrök a 10 kartondobozban rendre 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 0 ilyen konzervet találtak, s ezeket a konzerveket selejtesnek minősítették.

b) Határozza meg a kartondobozonkénti selejtes konzervek számának átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését! (3 pont)

17) Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm.



a) Mekkora a nagyobb henger átmérője? Válaszát milliméterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

A készletben az építőelemek kék vagy piros színűek. Péter 8 ilyen elemet egymásra rak úgy, hogy több piros színű van köztük, mint kék. Lehet, hogy csak az egyik színt használja, de lehet, hogy mindkettőt.

b) Hányféle különböző szín összeállítású 8 emeletes tornyot tud építeni? (4 pont)

A gyárban (ahol ezeket az építőelemeket készítik) nagyon ügyelnek a pontosságra.

Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne vásárolni, melyre igaz a következő állítás: *0,01-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építőelemek között van selejtes.*

c) Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András? (7 pont)

18) Egy 15°-os emelkedési szögű hegyoldalon álló függőleges fa egy adott időpontban a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méter hosszú árnyékot vet. Ugyanebben az időpontban a közeli vízszintes fennsíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának. Hány méter magas a fa?

Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (12 pont)

19) Aranyékszerek készítésekor az aranyat mindig ötvözik valamilyen másik fémmel. A karát az aranyötvözet finomságát jelöli. Egy aranyötvözet 1 karátos, ha az ötvözet teljes tömegének $\frac{1}{24}$ része arany, a k karátos aranyötvözet tömegének $\frac{k}{24}$ része arany.

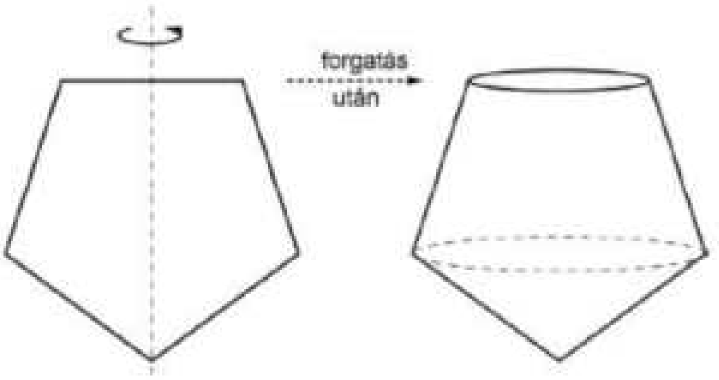
Kata örökölt a nagymamájától egy 17 grammos, 18 karátos aranyláncot. Ebből két darab 14 karátos karikagyűrűt szeretne csináltatni.

a) Legfeljebb hány gramm lehet a két gyűrű együttes tömege, ha aranytartalmuk összesen sem több mint az aranylánc aranytartalma? (4 pont)

Kata végül két olyan gyűrűt készíttetett, amelyek együttes tömege 16 gramm. (A megmaradó 14 karátos aranyötvözetet törtaranyként visszakapta.) Az elkészült két karikagyűrű tekinthető két lyukas hengernek, amelyek szélessége (a lyukas hengerek magassága) megegyezik. Az egyik gyűrű belső átmérője 17 mm, és mindenhol 1,5 mm vastag, a másik gyűrű belső átmérője 19,8 mm, vastagsága pedig mindenhol 1,6 mm.

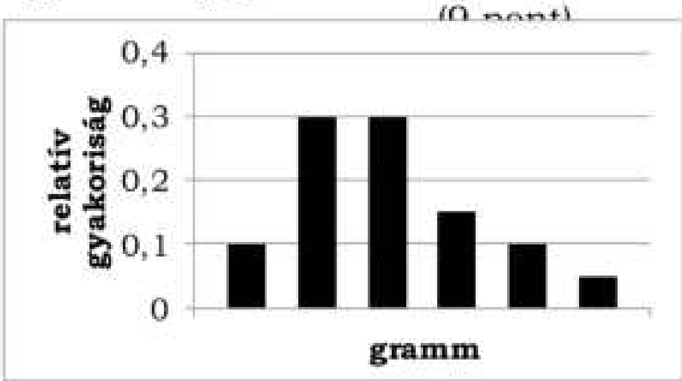
b) Hány mm a gyűrűk szélessége, ha a készítésükhöz használt 14 karátos aranyötvözet sűrűsége $15\frac{g}{cm^3}$? (10 pont)

20) Egy cég a függőleges irány kijelölésére alkalmas, az építkezéseknél is gyakran használt „függőónt” gyárt, amelynek nehezéke egy acélból készült test. Ez a test egy 2 cm oldalhosszúságú szabályos ötszög egyik szimmetria-tengelye körüli forgatásával származtatható (lásd az ábrán).



a) Hány cm^3 a nehezék térfogata? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (9 pont)

A minőség-ellenőrzés 120 darab terméket vizsgált meg. Feljegyezték az egyes darabok egész grammokra kerekített tömegét is. Hatféle tömeg fordult elő, ezek relatív gyakoriságát mutatja az oszlopdiagram.



b) Készítsen gyakorisági táblázatot a 120 adatról, és számítsa ki ezek átlagát és szórását! (5 pont)

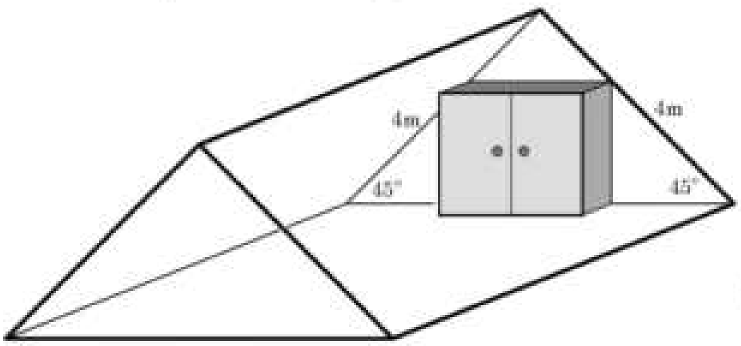
21) Egy üzemben olyan digitális műszert gyártanak, amely kétféle adat mérésére alkalmas: távolságot és szöget lehet vele meghatározni. A gyártósor meghibásodott, de ezt hosszabb ideig nem vették észre. Ezalatt sok mérőeszközt gyártottak, ám ezeknek csak a 93%-a adja meg hibátlanul a szöget, a 95%-a méri hibátlanul a távolságot, sőt a gyártott mérőeszközök 2%-a mindkét adatot hibásan határozza meg.

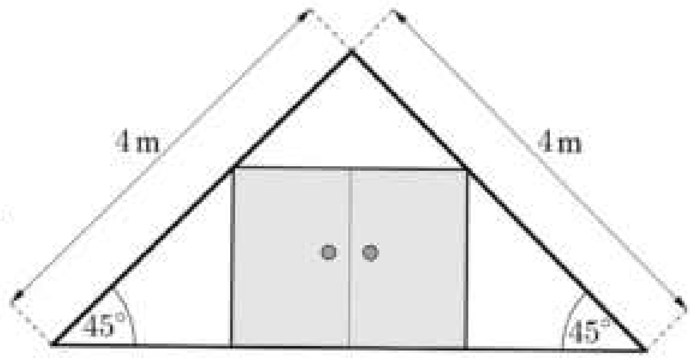
a) Az egyik minőségellenőr 20 darab műszert vizsgál meg visszatevéses mintavétellel a meghibásodási időszak alatt készült termékek közül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 darab hibásat talál közöttük? (Egy műszert hibásnak tekintünk, ha akár a szöget, akár a távolságot hibásan méri.) (7 pont)

Vízszintes, sík terepen futó patak túlpartján álló fa magasságát kell meghatároznunk. A síkra merőlegesen álló fát megközelíteni nem tudjuk, de van egy kisméretű, digitális műszerünk, amellyel szöget és távolságot is pontosan tudunk mérni. A patakparton kitűzzük az *A* és *B* pontokat, amelyek 10 méterre vannak egymástól. Az *A* pontból 55°-os, a *B*-ből 60°-os emelkedési szög alatt látszik a fa teteje. Szögméréssel még megállapítjuk, hogy $ATB\sphericalangle = 90^\circ$, ahol *T* a fa „talppontja”.

b) Milyen magas a fa? (9 pont)

22) Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készíttet. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású”, a második pedig elölnézetben ábrázolja a szekrényt.





A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie.

a) Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (azaz a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.) (8 pont)

A szekrény elkészült. Az akasztós részébe Kovács úr vasárnap este 7 inget tesz be, a hét minden napjára egyet-egyet. Az ingek között van 2 fehér, 2 világoskék és 3 sárga. Reggelente nagyon siet, ezért Kovács úr csak benyúl a szekrénybe, és anélkül, hogy odanézne, véletlenszerűen kivesz egy inget.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét első három napján vagy három különböző színű vagy három egyforma színű inget választ? (Ha valamelyik nap viselt egy inget, azt utána már nem teszi vissza a szekrénybe.) (8 pont)

23) Egy 2 cm sugarú, 20 cm széles festőhengerrel dolgozva egy fordulattal körülbelül 3 ml festéket viszünk fel a falra. (A festőhenger csúszás nélkül gördül a falon.)

a) Elegendő-e 4 liter falfestéket vásárolnunk, ha a szobánkban $40\ \text{m}^2$-nyi falfelületet egy rétegben, egyszer akarunk lefesteni? (6 pont)

b) Milyen magasan állna 4 liter falfesték a 16 cm átmérőjű, forgáshenger alakú festékes vödörben?
Válaszát cm-ben, egészre kerekítve adja meg! (5 pont)

24) a) Egy kocka és egy gömb felszíne egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a gömb térfogata nagyobb, mint a kockáé! (6 pont)

Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza p, a másiké pedig q $(p>0,\ q>0)$. (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.)

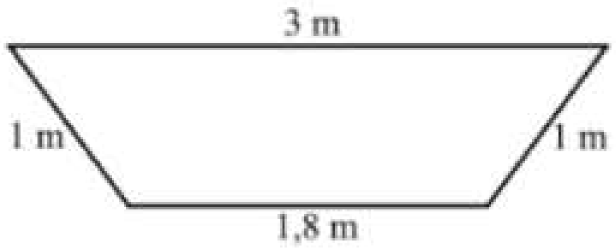
b) Igazolja, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne $6\cdot\sqrt[3]{\left(p^3+g^3\right)^2}$. (2 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne kisebb, mint a két összeolvasztott kocka felszínének összege! (8 pont)

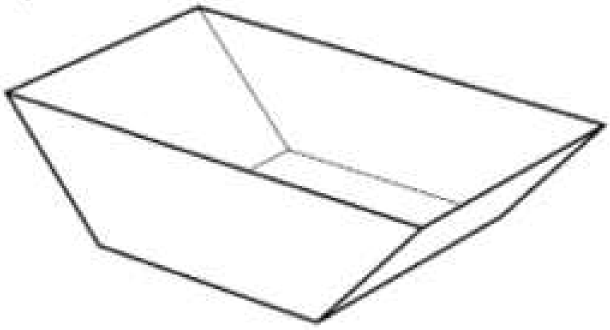
25) Egy kisüzemi meggymagozó-adagoló gép 0,01 valószínűséggel nem távolítja el a magot a meggyből, mielőtt a meggyszemet az üvegbe teszi. A magozógépen áthaladt szemek közül 120-120 darab kerül egy-egy üvegbe.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott üvegben legalább 2 darab magozatlan szem van! (5 pont)

A termelés során keletkezett hulladékot nagy méretű konténerbe gyűjtik, melyet minden nap végén kiürítenek és kitisztítanak. A konténer egyenes hasáb alakú. A hasáb magassága 2 m, alaplapja húrtrapéz, melynek méretei az 1. ábrán láthatók. A konténert vízszintes felületen, az 1,8 m×2 m-es (téglalap alakú) lapjára állítva helyezik el (lásd a 2. ábrát).



1. ábra


2. ábra

b) Számítsa ki a hasáb térfogatát! Határozza meg, hogy milyen magasan áll a konténerben a tisztításához beletöltött 2,7 m^3 térfogatú folyadék! (11 pont)

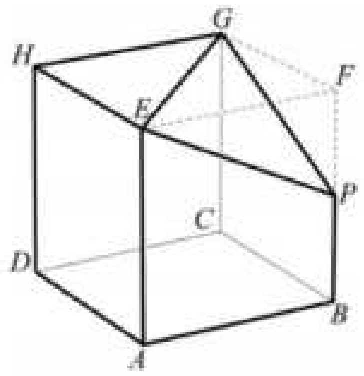
26) Egy automatának 100 gramm tömegű hasábokat kell két egyenlő tömegű részre szétvágnia. A két darab közül az egy az *A* futószalagra kerül, a másik a *B* futószalagra. Az utolsó négy darabolásnál az automata hibája miatt az *A* futószalagra került darabok tömege 51 g, 52 g, 47 g, 46 g.

a) Igazolja, hogy a két futószalagra került 4-4 darab tömegének átlaga különbözik, a szórása pedig megegyezik! (16 pont)

Egy háromoldalú egyenes hasáb alapéleinek hossza: $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{13}$, a hasáb magassága $2\sqrt{3}$ hosszúságú. Az *AB* alapél egyenesére illeszkedő *S* sík $30°$-os szöget zár be a hasáb alaplapjával, és két részre vágja a hasábot.

b) Számítsa ki a két rész térfogatának arányát! (11 pont)

27) A 6 cm oldalélű tömör *ABCDEFGH* kocka *BF* élén megjelöltük az él *P* felezőpontját, majd a kockát kettévágtuk az *E*, *G*, *P* pontokra illeszkedő síkkal (az ábra szerint).



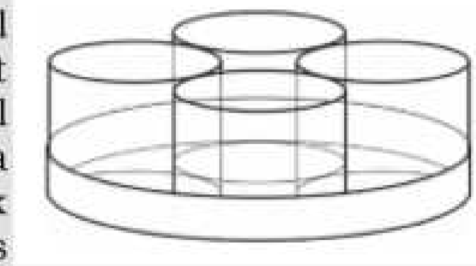
a) Mekkora a kettévágás során keletkezett nagyobbik test felszíne? (8 pont)

b) Mekkora szöget zár be a metsző sík és a kocka *EFGH* lapjának síkja? (4 pont)

28)

a) Az $ABCD$ négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek. Bizonyítsa be, hogy $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$. (4 pont)

Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharakat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.



b) Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél!

A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm. (5 pont)

c) Igaz-e, hogy a pohárba belefér 5 dl üdítő? (4 pont)

29) Egy fémlemezből készült, forgáshenger alakú hordóban 200 liter víz fér el.

a) Mekkora területű fémlemez kell a 80 cm magas, felül nyitott hordó elkészítéséhez, ha gyártása során 12%-nyi hulladék keletkezik? (6 pont)

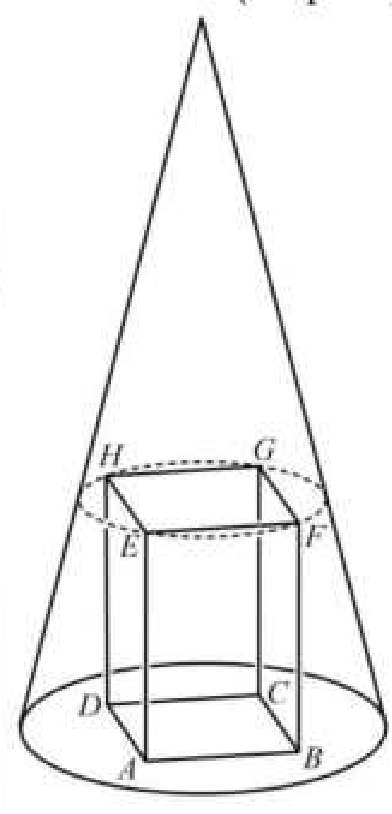
Egy kisvállalkozásnál több különböző méretben is gyártanak 200 literes, forgáshenger alakú lemezhordókat.

b) Mekkora annak a 200 liter térfogatú, felül nyitott forgáshengernek a sugara és magassága, amelynek a legkisebb a felszíne? (10 pont)

30) Az $ABCDEFGH$ négyzetes oszlop AE, BF, CG, DH élei merőlegesek az $ABCD$ alaplapra. Az A csúcsból kiinduló három él hossza $AB = AD = 8$ egység, $AE = 15$ egység.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{EF}$ és $\overrightarrow{AH}$ vektorok skaláris szorzatát! (3 pont)

A négyzetes oszlop köré egy P csúcspontú forgáskúpot illesztünk úgy, hogy az A, B, C, D csúcsok a kúp alaplapjára, az E, F, G, H csúcsok pedig a kúp palástjára illeszkedjenek. (A kúp és a négyzetes oszlop tengelye egybeesik.) A kúp magassága 45 egység.



b) Számítsa ki a kúp felszínét! (7 pont)

c) Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 15 egység hosszú, és a másik két oldala is egész szám hosszúságú? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőknek.) (6 pont)

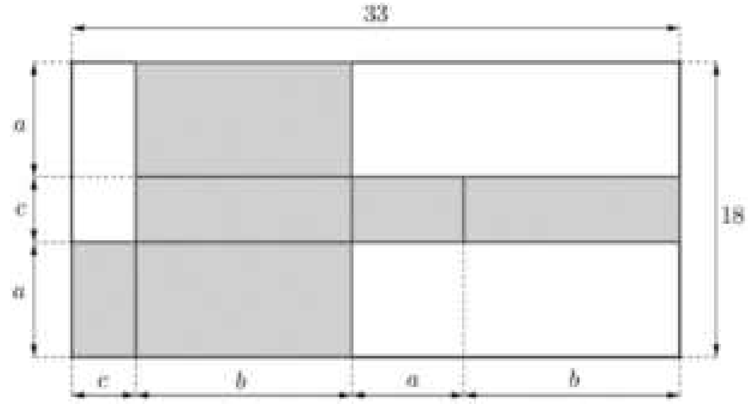
31) Egy bűvész két egyforma „dobótetraédert” használ az egyik mutatványához. A dobótetraéder alakja olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek alapéle 6 cm hosszú, az oldalélei pedig $30°$ -os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

a) Határozza meg a tetraéder térfogatát! (6 pont)

A tetraéderrel 1-est, 2-est, 3-ast vagy 4-est lehet dobni (a dobás eredményének az alsó lapon lévő számot tekintjük). Az 1-es, a 2-es, illetve a 3-as dobásának valószínűsége egyenlő. A 4-es dobás valószínűsége ötször akkora, mint az 1-es dobásé.

b) Ha a bűvész a két dobótetraédert egyszerre dobja fel, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 6 lesz? (5 pont)

32) Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg.



a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm! (3 pont)

b) Hogyan kell megválasztani az a, b, c, élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen? (9 pont)

Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg.

c) A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van amelynek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem? (4 pont)

33) Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, a CA befogójának hossza 6 cm.

a) Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (3 pont)

A BC befogó egy P belső pontját összekötjük az A csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$.

b) Milyen hosszú a PB szakasz? (6 pont)

Állítsunk merőleges egyenest az ABC háromszög síkjára C pontban! A merőeleges egyenes D pontjára teljesül, hogy CD 15 cm.

c) Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata? (4 pont)

34) a) A $KLMN$ derékszögű trapéz alapjai $KL = 2\sqrt{12}$ és $MN = 3\sqrt{75}$ egység hosszúak, a derékszögű szár hossza $10\sqrt{2}$ egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges LM szár egyenese körül.
Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! (π két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg!) (4 pont)

b) Az $ABCD$ derékszögű érintőtrapéz AB és CD alapjai $(AB > CD)$ hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges AD szárral vett érintési pontja negyedeli az AD szárat.
Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát! (12 pont)

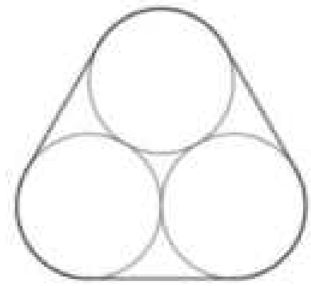
35) Ha András az asztalra ejti a pingponglabdáját, akkor a labda az ejtési magasság kb. 84%-ára pattan vissza. Ezután tovább pattog úgy, hogy minden asztalra érkezés után az előző felpattanás magasságának 84%-áig emelkedik fel.

a) András egy alkalommal (az asztal lapjától mérve) 1 méter magasságból ejtette az asztalra a pingponglabdát. Mekkora utat tesz meg összesen a pingponglabda az első asztalra érkezésétől a tizenötödikig? (Feltételezzük, hogy a labda csak függőleges irányban mozog, a vízszintes irányú elmozdulás elhanyagolható.) (4 pont)

András azt állítja, hogy az összes pingponglabdájának száma 6-tal osztva 2 maradékot, 15-tel osztva pedig 1 maradékot ad.

b) Mutassa meg, hogy András állítása hamis! (3 pont)

Dóri olyan pingponglabda-készletet vásárolt, amelynek dobozába három egyforma labda – az ábrán látható elrendezésben – szorosan belefér. A doboz hengeres test, melynek alaplapját három egybevágó körív és három egyenlő hosszúságú szakasz határolja. (Az ábrán a dobozt felülnézetből látjuk.)



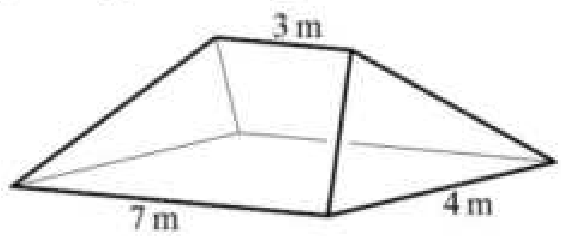
c) A doboz térfogatának hány százalékát tölti ki a három pingponglabda, ha a labdák átmérője 40 mm? (A doboz falvastagsága elhanyagolható.) (7 pont)

36) Ádám balatoni telkén áll egy kis hétvégi ház. A ház felülnézete egy $7\text{ m} \times 4\text{ m}$-es téglalap. Ha esik az eső, akkor a tetőre lehulló csapadékot a tető négy oldalán körbefutó ereszcsatornák gyűjtik össze és vezetik be négy nagy, kezdetben üres (fedett) hordóba. A hordók forgáshenger alakúak, belső átmérőjük 40 cm, magasságuk 90 cm.

Egy nyári zivatar alkalmával 15 mm csapadék hullott a településen (ez azt jelenti, hogy minden vízszintes felületen 15 mm magasan állna az esővíz, ha nem szivárogna el.) A zivatar közben a tetőre lehullott csapadék 95%-a összegyűlt a hordókban.

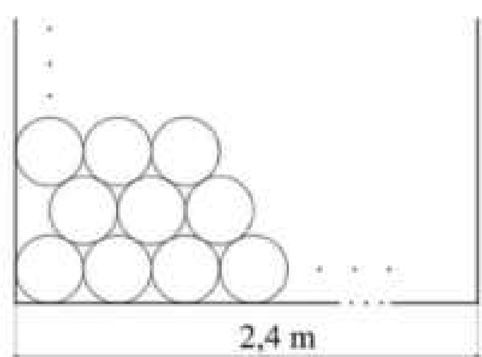
a) A zivatar után mindegyik hordóban ugyanolyan magasan állt a víz. Mekkora ez a magasság? (5 pont)

A ház cseréptetője elöregedett, cserélni kell. A tető felülete négy síkidomból áll. A háztető 7 méteres oldalaihoz két egybevágó húrtrapéz csatlakozik, amelyek síkja a vízszintessel egyaránt 30 fokos szöget zár be. A trapézok egymáshoz csatlakozó, rövidebb oldala 3 méter hosszú. A háztető 4 méteres oldalaihoz két egybevágó, egyenlő szárú háromszög csatlakozik.



b) Hány darab cserepet kell vásárolnia Ádámnak a tető újracserepezéséhez, ha a tetőfelület egy négyzetméterére 30 darabra van szükség, és a megvásárolt mennyiség 8%-a hulladék lesz? (11 pont)

37) Egy teherautó raktere 2,4 méter széles, 2 méter magas és 7 méter hosszú. Ezzel a teherautóval kell olyan, méretre vágott farönköket szállítani, amelyek forgáshenger alakúak, 24 centiméter az átmérőjük, és 7 méter hosszúak. A rakomány biztonsági okokból nem nyúlhat túl a raktéren egyik irányban sem. A szállítócég az ábrán látható stratégiával rendezi el a farönköket.



a) Mutassa meg, hogy legfeljebb 86 farönköt lehet így a raktérben elhelyezni! (8 pont)

b) A raktérnek hány százaléka marad üresen, ha 86 farönköt szállítanak? (4 pont)

Kiderült, hogy a fák egy részében megtelepedtek a szúbogarak. Bármelyik fát kiválasztva 4% annak a valószínűsége, hogy van benne szú. Az egyik vásárló cég 50 fát vett.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb egy szúrágta fa kerül a rakományába? (4 pont)

38) Egy áruházláncban minden *Kocka* csokoládé vásárlásakor a csoki mellé ajándékba adnak egy „zsákbamacska" csomagot, amelyben egy kis fémkocka van. A fémkocka mindegyik lapja sárga vagy kék színűre van festve úgy, hogy mind a két színű lap előfordul.

a) Igazolja, hogy (színezés szerint) összesen 8-féle kocka van, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek! (6 pont)

b) Dórinak 7 különböző színezésű kockája van, így már csak egy hiányzik a teljes készlethez, hogy abból nyakláncot készítsen magának. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 3 darab *Kocka* csokoládét vesz, akkor meglesz a teljes készlete? (Feltételezhetjük, hogy mindegyik kockafajta ugyanakkora valószínűséggel fordul elő a csomagokban.) (4 pont)

Az ábrán látható *ABCDEFGH* kocka élhosszúsága 10 egység.

c) Számítsa ki az *ABG* háromszög beírt körének sugarát! (6 pont)